

Ist der Euro fair? Ergebnis einer empirischen Untersuchung

Andreas Futschik
Institut für Statistik und Decision Support Systems, Universität Wien

Gerhart Bruckmann zum 70. Geburtstag gewidmet

Zusammenfassung: In letzter Zeit sind Medienberichte aufgetaucht, nach denen der Euro keine faire Münze sein soll. Eine Abweichung der Kopfwahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ wurde insbesondere in Zusammenhang mit dem belgischen und französischen Euro behauptet. Wir präsentieren in diesem Zusammenhang Ergebnisse von Münzwurfexperimenten und diskutieren die Implikationen aus statistischer Sicht.

Abstract: Recently it has been claimed in the media that the Euro is not a fair coin. Deviations of the probability for “head” from $\frac{1}{2}$ have been reported in particular for the Belgian and the French Euro. To address the issue, we present results from an empirical point of view and discuss their statistical implications.

Schlüsselwörter: Münzwurfexperimente, Gleichverteilung.

1 Einleitung

Das Konzept der fairen Münze, d.h. einer Münze bei der Kopf und Zahl mit derselben Wahrscheinlichkeit fallen, scheint sowohl in der Öffentlichkeit als auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung weit verbreitet zu sein. In der Wahrscheinlichkeitsrechnung beruhen bekanntlich viele illustrierende Beispiele auf fairen Münzen. Historische Berichte über Münzwurfserien, bei denen der Anteil an Kopfwürfen sehr nahe bei 0.5 lag, unterstützen das Konzept. So führte etwa John Kerrich während des zweiten Weltkriegs Experimente zur Wahrscheinlichkeitstheorie durch, als er sich in deutscher Kriegsgefangenschaft befand. Unter anderem warf er eine Münze 10000 mal, wobei er 5067 mal Kopf erhielt. (Siehe Freedman, Pisani und Purves, 1991.) Folgende weiteren Ergebnisse sind überliefert:

- George Buffon (1707-1788): 2048 mal Kopf bei 4040 Münzwürfen
- Karl Pearson (1857-1936): 12012 mal Kopf bei 24000 Münzwürfen.

Das allgemeine Vertrauen in die Gerechtigkeit von Münzen spiegelt sich auch in der Verwendung von Münzen bei Glücksspielen und vielen Losentscheidungen wieder.

Dementsprechend aufsehenerregend waren dann auch kurz nach der Einführung des Euros auftauchende Medienberichte, in denen behauptet wurde, dass der Euro nicht fair wäre. So schrieb etwa die deutsche Tageszeitung “Die Welt” am 3. Januar 2002 unter dem Titel “Abschied vom Kopf- oder Zahlspiel”:

Warschau - Vom Euro dürfen wir einiges erhoffen, doch in einem Punkt sollten wir ihm misstrauen. Wer eine Euro-Münze auf dem Tisch zum Kreiseln bringt, um nach dem Motto "Kopf oder Zahl" eine wichtige (womöglich kostspielige) Entscheidung herbeizuführen, der sollte wissen, dass der Euro kein gerechter Richter ist. Das haben die polnischen Mathematiker Tomasz Gliszczynski und Waclaw Zawadowski herausgefunden. Verwandte aus Belgien hatten ihnen vor Weihnachten die ersten neuen Münzen mitgebracht. Gliszczynski, der an der Akademia Podlaska im ostpolnischen Siedlce Statistik lehrt, und seine Studenten warfen die Ein-Euro-Münze 250 Mal. 140 Mal zeigte sie den massigen Kopf des belgischen Königs Albert, nur 110 Mal die Zahl.

Obwohl die beschriebenen Ergebnisse zum belgischen Euro aus statistischer Sicht noch keinen wirklich schlüssigen Beweis für eine Abweichung der Kopfwahrscheinlichkeit von 0.5 liefern (Teststatistik 1.89, zweiseitiger p-Wert: 0.058), war das Interesse für das Ergebnis stark. So bereitete die obige Erkenntnis unter anderem Sorgen in Hinblick auf das Vertrauen in den Euro und auf die nächste Fußballweltmeisterschaft:

Die Ungerechtigkeit der Münze, verbunden mit der anhaltenden Schwäche des Euro gegenüber dem Zloty, dürfte die Skepsis der Polen gegenüber der Währung und ihr traditionell großes Vertrauen in den Dollar weiter verstärken. [...] Ob die asymmetrische Prägung auch beim Wurf in die Luft die Seite mit König Albert begünstigt, haben die Mathematiker noch nicht überprüft. Anders als bei der Kreiselmethode vermutet Zawadowski in diesem Falle nur eine "vernachlässigenswerte Abweichung". Doch diese Hypothese ist noch zu verifizieren - auf jeden Fall vor der Fußball-WM, bei welcher der Münzwurf über die Seitenwahl und womöglich über Glück und Unglück ganzer Nationen entscheidet.

[Die Welt, 3. Januar 2002]

In der Folge wurde die Frage auch noch von anderen Medien wie CNN und ORF aufgegriffen. Auch Mitarbeiter der BBC sahen sich veranlasst, eine französische Euromünze zehntausend mal zu werfen.

[...] with a basic ability to count - and although having better things to do than flip a coin 10,000 times - BBC Sport Online took the investigative route to add some weight to the coin debate. With a French euro and a limited knowledge of physics - is it best to flip a coin in the air or spin it on a table? - we set to work. Using a combination of the two tossing techniques we also reached a conclusion which showed a startling irregularity in the results. One side came out an average 54% of the time, but whether it is a "head" or "tail" left us stumped. It is the side with a tree, ringed by the words "Liberté, Égalité, Fraternité".

Wir wollen uns mit dieser Frage aus statistischer Sicht befassen. Wie verbreitet faire Münzen in der Praxis sind, ist nicht so klar. Die durch die unterschiedliche Prägung von

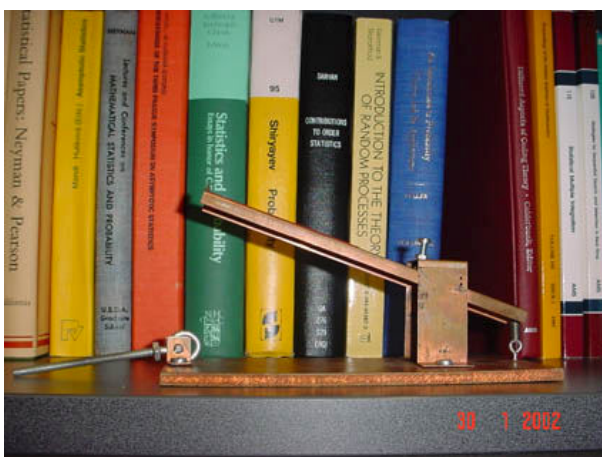
Vorder- und Rückseite verursachte Asymmetrie von Münzen spricht an sich gegen die Symmetrieannahme, dass die Wahrscheinlichkeit Kopf zu erhalten exakt 0.5 beträgt. So sind auch größere Abweichungen der Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ z.B. von amerikanischen Penny-Münzen bekannt, wenn die Münzen nicht geworfen, sondern auf einer glatten Oberfläche gekreiselt werden. Es gibt Berichte, nach denen die Wahrscheinlichkeit für Kopf bei 1990 geprägten Münzen ca. 0.4 beträgt. Bei Pennies aus dem Jahre 1961 soll die Wahrscheinlichkeit für Kopf gar nur 0.1 betragen (Scheaffer et al. (1997)). Auch bei der polnischen Zwei-Zloty Münze soll die asymmetrische Prägung laut Aussage des Mathematikers Gliszczynski zu einer Abweichung von der Gleichverteilung führen, die anhand von mehr als 10000 Würfeln belegt wurde.

Wir wollen die Frage anhand von Münzwurfresultaten mit 1-Euro Münzen näher untersuchen. Zur Verfügung standen Münzen aus Italien, Deutschland, Frankreich und Österreich, wobei an den Münzen keine Auffälligkeiten erkennbar waren. Die Versuche wurden von Patrick Winter, einem 14-jährigen Schüler aus Wien, durchgeführt.

2 Design der Experimente

Zur Untersuchung der Fragestellung wurden mit den betrachteten Münzen sowohl Münzwurf- als auch Kreiselexperimente durchgeführt. Insgesamt wurden 1900 Experimente unter verschiedenen Bedingungen durchgeführt. Um die Versuchsbedingungen möglichst konstant zu halten, wurden die Münzwürfe mittels des unten abgebildeten Katapults durchgeführt. Das Katapult war dabei auf die maximale Beschleunigung eingestellt, da sich herausstellte, dass die Würfe bei zu geringer Beschleunigung nahezu deterministisch waren.





Bei den Kreiselexperimenten wurde die Münze mit einer Hand gehalten und mit der anderen so wie in der unteren Abbildung zu sehen angestupst. Mit dieser Technik wird die Münze im Idealfall in eine ca. 10 bis 20 Sekunden dauernde Drehbewegung versetzt, bevor sie schließlich auf eine der beiden Seiten fällt. In der Praxis kann der Versuchsablauf gestört werden, wenn die Münze mit Gegenständen kollidiert bzw. vom Tisch fällt.



3 Ergebnisse

Wir beginnen mit der Beschreibung der Kreiselexperimente, die zunächst mit jeweils einem österreichischem, einem deutschen, einem italienischen und einem französischen Euro durchgeführt wurden. Zuerst wurde jede Münze hundert mal gedreht. Die Münzen, bei denen signifikante Ergebnisse (Test für Anteilswert mit $\alpha = 0.05$) zu beobachten waren, wurden weitere 150 mal gedreht, um zu sehen, ob sich die Ergebnisse bestätigen. Da nur signifikante Zwischenergebnisse weiter verfolgt wurden, blieb der Fehler erster Art bei den einzelnen Tests kontrolliert.

Im Gegensatz zu den oben beschriebenen Experimenten lieferte keine der durchgeführten Münzwurfserien mit dem Katapult signifikante Ergebnisse. (Für die deutsche Münze liegen hier keine Ergebnisse vor.) Der typische Ablauf des Experiments war, dass

Tabelle 1: Kreiselexperimente mit vier Ein-Euro Münzen (Serie 1)

Land	Stichprobenumfang	Anteil "Kopf"	p-Wert
OE	100	0.500	1
D	100	0.520	0.689157
IT	250	0.412	0.005403
FR	250	0.632	0.000030

Tabelle 2: Katapultexperimente mit drei verschiedenen Ein-Euro-Münzen (Serie 1)

Land	Stichprobenumfang	Anteil "Kopf"	p-Wert
OE	400	0.490	0.689157
IT	150	0.473	0.508382
FR	150	0.527	0.508382

die Münze in die Luft geschleudert wurde, von Tisch oder Wand abprallte und dann zu ihrem endgültigen Lageplatz rollte. Bisweilen fiel die Münze dabei auch noch zu Boden.

Bei den Kreiselexperimenten kam es öfters vor, dass die Drehbewegung entweder durch Kollision mit anderen Objekten oder zu Boden Fallen der Münze gestört wurde.

Während bei den in Tabelle 1 angeführten Kreiselexperimenten alle Versuche gewertet wurden, enthält Tabelle 3 nur ungestörte Experimente. Dabei haben wir neben den bisher verwendeten österreichischen und italienischen Euromünzen auch zwei weitere Münzen der genannten Länder verwendet. Das Prägedatum aller Münzen war 2002.

Tabelle 3: Ungestörte Kreiselexperimente mit zwei Ein-Euro-Münzen (Serie 1) und zwei anderen Ein-Euro-Münzen (Serie 2)

Land	Stichprobenumfang	Anteil "Kopf"	p-Wert
OE (1)	100	0.470	0.548506
IT (1)	100	0.170	$4.11 \cdot 10^{-11}$
OE (2)	200	0.395	0.002980
IT (2)	100	0.230	$6.66 \cdot 10^{-8}$

Bei den italienischen Euros war die Abweichung des "Kopf"-Anteils von $\frac{1}{2}$ noch eindeutiger und hochsignifikant. Eine plausible Interpretation dafür ergibt sich, wenn die ursprüngliche Ergebnisserie als Mischung von zumindest zwei Bernoulli-Verteilungen aufgefasst wird, wobei bei den gestörten Ergebnissen die Wahrscheinlichkeit für "Kopf" durch die zusätzliche Randomisierung viel näher bei $\frac{1}{2}$ liegt. Interessant ist, dass sich beim zweiten betrachteten österreichischen Euro nunmehr ebenfalls signifikante Abweichungen von $\frac{1}{2}$ ergeben. Das Ergebnis nach hundert Würfeln (39 mal Kopf) war knapp signifikant ($\alpha = 0.05$) und bestätigte sich in weiteren hundert Würfeln. Somit muss davon

ausgegangen werden, dass sich auch verschiedene Münzen desselben Landes durchaus unterschiedlich verhalten können. Das unterschiedliche Verhalten könnte darauf zurückzuführen sein, dass der Mittelteil der Bimetallmünzen nicht immer exakt gleich eingesetzt ist.

4 Schlussbemerkungen

Dass Kopf und Zahl nicht mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten, scheint ein häufiges Phänomen bei Münzen im allgemeinen und 1-Euro Münzen im besonderen zu sein. Ob Abweichungen der betreffenden Wahrscheinlichkeiten von $\frac{1}{2}$ in der Praxis statistisch tatsächlich nachweisbar sind, hängt sehr von den Versuchsbedingungen ab. Während die Abweichungen von $\frac{1}{2}$ am stärksten sind, wenn die Münze ungestört kreiseln kann, waren beim normalen Münzwurf mittels Katapult keine Unterschiede von $\frac{1}{2}$ nachweisbar. Bei den Kreiselexperimenten waren insbesondere beim italienischen und französischen Euro deutliche Abweichungen von der Gleichverteilung festzustellen. Bei einem der zwei betrachteten österreichischen Euros waren ebenfalls Abweichungen nachweisbar, was darauf hindeutet, dass sich auch Münzen derselben Prägung beim Werfen durchaus unterschiedlich verhalten können. Für eine genauere Untersuchung der Variabilität der Kopfwahrscheinlichkeiten sowohl zwischen als auch innerhalb der Prägeländer, etwa im Zuge einer Varianzkomponentenanalyse, wären Experimente mit einer größeren Stichprobe an Euromünzen aus den diversen Ländern erforderlich.

Danksagung

An dieser Stelle soll Patrick Winter für die Durchführung der Münzwürfe und Erich Neuwirth für das zur Verfügung Stellen des Katapults herzlich gedankt werden.

Literatur

D. Freedman, R. Pisani, and R. Purves. *Statistics*. Third Edition. Norton, New York, 1991.

R.L. Scheaffer, M. Gnanadesikan, A. Watkins, and J. Witmer. *Activity Based Statistics*. Springer, New York, 1997.

Adresse des Autors:

Ao.Univ.Prof. Dr. Andreas Futschik
Institut für Statistik und Decision Support Systems
Universität Wien
Universitätsstraße 5
A-1010 Wien
Tel. +43 1 4277/ 38634
Fax +43 1 4277 38639
E-Mail: andreas.futschik@univie.ac.at