

# Angewandte Geostatistik in der landwirtschaftlichen Versuchsplanung

Herbert Schwarz  
Institut für Mathematik und Angewandte Statistik  
Universität für Bodenkultur

**Zusammenfassung:** In der landwirtschaftlichen Versuchsplanung tritt oft auch eine räumliche und/oder eine zeitliche Komponente auf. Bei Feldversuchen mit raumbezogenen Daten kann die Variation zwischen Messungen bei einer bestimmten Distanz mit Hilfe des Semivariogramms modelliert werden. Anhand eines praktischen Beispiels wird bei einem 50 mal 100 m großen Versuchsfeld in einem 7 mal 7 m Raster der Aufbau des Bodens, der sich bis zu einer Tiefe von 120 cm in drei unterschiedliche Horizonte gliedert, untersucht. Für die Strukturanalyse im obersten Bodenhorizont wird ein geschachteltes Variogrammodell mit Nuggeteffekt, einer sphärischen und zwei gauß'schen Komponenten, bei zonaler und geometrischen Anisotropie angepaßt.

**Abstract:** In agricultural experimental design a spatial or temporal component can often be observed. In the spatial analysis of field trials the variation between measurements at a certain distance can be modelled using the semivariogram. In a practical experiment in a 50 by 100 m field the structure of the soil is investigated in a 7 times 7 m grid to a depth of 120 cm. Within that depth the soil is subdivided into three levels. For the structure-analysis of the topmost level, a combined variogram model, including a nugget variance, a spherical and two gaussian components, is used, modelling a mixture of geometric and zonal anisotropies.

**Schlüsselwörter:** Geostatistik, Strukturanalyse, Variogramm.

## 1 Einleitung

In der landwirtschaftlichen Versuchsplanung treten oft auch räumliche und/oder zeitliche Beziehungen auf, die bei einer richtigen statistischen Versuchsauswertung auch berücksichtigt werden. Bei Feldversuchen mit raumbezogenen Daten kann die Variation zwischen Messungen bei einer bestimmten Distanz mit Hilfe des Semivariogramms modelliert werden. Die Kenntnis der räumlichen Struktur einer oder mehrerer Variable kann als wesentliche Information für die statistische Datenanalyse der Feldversuche, für die Anlage neuer Versuche, für die Meßnetzplanung und Meßnetzoptimierung und für die räumliche Interpolation mit Hilfe des Kriging eingesetzt werden.

Im Rahmen dieser Arbeit werden raumbezogene Daten, die untersuchte Variable ist die Bodentiefe des obersten Bodenhorizontes, analysiert. Der untersuchte Boden ist ein tiefgründiger, fruchtbarer Schwarzerdeboden, der sich bis zu einer Tiefe von 120 cm in drei unterschiedliche Horizonte gliedert. Der oberste Horizont ist der sogenannte A-Horizont, dabei handelt es sich um den fruchtbaren, humushältigen Oberboden, der ungefähr bis zu einer Tiefe von 40 cm vorkommt. Die Tiefe des obersten Bodenhorizontes wurde in einem 50 mal 100 m großen Versuchsfeld in einem 7 mal 7 m Raster untersucht. Die Erhebungen wurden im Frühjahr 1995 im Raum Großenzersdorf durchgeführt.

## 2 Strukturanalyse

Das Semivariogramm dient als eines der wichtigsten Werkzeuge in der Strukturanalyse der räumlichen Verteilung regionalisierter Variable. Dazu stellt das empirische Variogramm ein wesentliches Werkzeug für eventuelle weitere Studien dar. Nach WEBSTER und OLIVER (1990) sind Semivariogramme normalerweise charakterisiert durch den Klumpeneffekt  $C_0$ , die Reichweite oder den Einflußbereich  $a$  und den Schwellenwert  $C$ . Für die Berechnung und graphische Darstellung der Semivariogramme findet das Programm GEOSAN von DUTTER (1995b) Verwendung.

Nach JOURNEL und HUIJBREGTS (1978) ist das experimentelle Variogramm nur bis zu einer Distanz kleiner gleich der halben Größe der Untersuchungsfläche interpretierbar und zur Berechnung eines Variogrammwertes sollen mindestens 30 bis 50 Paare Verwendung finden. Werden Stichproben auf einem regelmäßigen oder pseudoregelmäßigen Gitter genommen, kann auch weniger als die Hälfte des untersuchten Bereiches als Einflußbereich genommen werden. Das experimentelle Variogramm wird für einen Bereich von 50 m und 30 m in den beiden Hauptrichtungen dargestellt, wobei ein Variogrammwert von mindestens 40 Paaren berechnet wird (*Tabelle 1* und *Tabelle 2*).

Für die Berechnung richtungsabhängiger Semivariogramme ist der Toleranzwinkel so klein als möglich zu nehmen, um eine verschwommene Anisotropie zu vermeiden, die aus der Kombination von Distanzen verschiedener Richtungen entstehen. Allerdings kann ein zu schmaler Toleranzwinkel eine falsche Variogrammschätzung bewirken, vor allem dann, wenn zu wenige Distanzpaare in einer Richtung vorliegen, um eine geeignete Beschreibung der Struktur zu liefern. Nach ISAACS und SRIVASTAVA (1989) besteht die beste Vorgangsweise darin, mehrere Toleranzwinkel für die Variogrammberechnung zu probieren, um dann den kleinsten, der noch gute Resultate liefert, auszuwählen. Für die Berechnung richtungsabhängiger Variogramme erscheint im hier vorliegenden Beispiel ein Toleranzwinkel von  $45^\circ$  am geeignetsten.

Wenn die Anisotropieachsen nicht mit den Hauptrichtungen der Daten zusammenfallen, muß eine Koordinatentransformation durchgeführt werden. Die Anisotropieachsen fallen mit den Hauptrichtungen der Daten in der Regel nicht zusammen, die Orien-

tierung der Datenachsen ist zufällig und die Orientierung der Anisotropieachsen hängt mit dateneigenen Phänomenen zusammen.

*Tabelle 1:* Empirisches Variogramm in der Hauptrichtung 15°

VARIABLE: Bodentiefe von Horizont A

NUMBER OF CONES: 1

CONE	ANGLE	TOLERANCE
(1)	15	45

NUMBER OF LAGS: 19

TOTAL NUMBER OF PAIRS: 2712

MIN. NUMBER OF PAIRS PER LAG: 40

LAG	MIN.DIS.	MAX.DIS.	AVG.DIS.	PAIRS	VALUE
1	7.0000	7.0000	7.0000	102	38.525
2	9.8995	9.8995	9.8995	91	64.082
3	14.000	14.000	14.000	95	40.737
4	15.652	15.652	15.652	167	64.072
5	19.799	21.000	20.464	159	66.503
6	22.136	22.136	22.136	157	63.350
7	25.239	25.239	25.239	127	75.303
8	28.000	28.000	28.000	81	67.605
9	28.862	29.698	29.099	201	69.075
10	31.305	31.305	31.305	122	83.541
11	35.000	35.000	35.000	170	61.412
12	35.693	37.696	36.611	240	87.835
13	39.598	39.598	39.598	41	37.012
14	40.817	42.579	41.894	264	71.513
15	44.272	44.822	44.496	167	58.231
16	46.957	46.957	46.957	83	76.367
17	49.000	49.497	49.345	189	78.937
18	50.478	50.961	50.778	140	62.482
19	53.310	54.672	53.815	116	66.871

Nach ISAAKS und SRIVASTAVA (1989) kann die Bestimmung der Anisotropieachsen auch mit Hilfe des Sterndiagramms erfolgen. Dabei müssen die Richtungen mit maximaler und minimaler Reichweite graphisch gefunden werden. Diese Richtungen entsprechen den Anisotropieachsen. Dabei werden die jeweiligen Werte ermittelt und in ein Sterndiagramm eingetragen. Diesem Sterndiagramm wird eine Ellipse angepaßt, deren Hauptachsen den Anisotropieachsen entsprechen.

Tabelle 2: Empirisches Variogramm in der Hauptrichtung 105°

VARIABLE: Bodentiefe von Horizont A

NUMBER OF CONES: 1

CONE	ANGLE	TOLERANCE
(1)	105	45

NUMBER OF LAGS: 11

TOTAL NUMBER OF PAIRS: 1250

MIN. NUMBER OF PAIRS PER LAG: 40

LAG	MIN.DIS.	MAX.DIS.	AVG.DIS.	PAIRS	VALUE
1	7.0000	7.0000	7.0000	96	44.057
2	9.8995	9.8995	9.8995	90	58.267
3	14.000	14.000	14.000	82	98.689
4	15.652	15.652	15.652	153	90.121
5	19.799	21.000	20.387	139	106.37
6	22.136	22.136	22.136	128	105.81
7	25.239	25.239	25.239	124	92.298
8	28.000	28.000	28.000	54	90.556
9	28.862	29.698	29.151	156	92.244
10	31.305	31.305	31.305	95	73.432
11	35.000	35.000	35.000	133	108.56

Eine andere Möglichkeit zur Bestimmung der Anisotropieachsen ergibt sich aus der rechnerischen Ermittlung, abgewandelt nach DUTTER (1995a). Dabei wird von zwei Hauptrichtungen, 0° und 90°, und einer dazwischenliegenden Richtung, 45°, ausgegangen. Die dazugehörenden Einflußbereiche seien  $r_1, r_2, r_3$ . Die drei Punkte  $(x_1, 0)$ ,  $(0, y_2)$  und  $(x_3, y_3)$  mit  $x_1 = r_1$ ,  $y_2 = r_2$  und  $x_3 = r_3 \cos \alpha$ ,  $y_3 = r_3 \sin \alpha$  definieren folgende Ellipse mit dem Zentrum  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ :  $\frac{x^2}{a^2} + 2\frac{xy}{b} + \frac{y^2}{c^2} = 1$

Die Parameter a, b und c werden durch Einsetzen der drei Punkte in die Ellipsengleichung berechnet:

$$\frac{x_1^2}{a^2} = 1$$

$$\frac{y_2^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{x_3^2}{a^2} + 2\frac{x_3 y_3}{b} + \frac{y_3^2}{c^2} = 1$$

$$\begin{array}{lll}
\text{Daraus folgt:} & a^2 = x_1^2 & a = 49.32 \\
& c^2 = y_2^2 & c = 20.00 \\
b = \frac{2x_3y_3}{\left(1 - \frac{x_3^2}{a^2} - \frac{y_3^2}{c^2}\right)} & b = \frac{2 \times 24.75^2}{\left(1 - \frac{24.75^2}{49.32^2} - \frac{24.75^2}{20.00^2}\right)} & = -1564.39
\end{array}$$

Die Berechnung des Drehwinkels zwischen den Hauptachsen der Ellipse, die den Anisotropieachsen entsprechen, und den Hauptachsen der Daten erfolgt durch:

$$\delta = \frac{1}{2} \arctan \frac{\frac{2}{b}}{\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}} = 15.73$$

Daraus werden die Anisotropieachsen mit den Richtungen  $15^\circ$  und  $105^\circ$  abgeleitet. Die Länge der Hauptachsen der Ellipse sind  $a_1 = 65.74$  und  $b_1 = 19.32$ . Sie werden aus dem Schnittpunkt der Geraden  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \cos \delta \\ \sin \delta \end{pmatrix}$  und ihrer Normalen mit der Ellipse berechnet.

Die Drehmatrix für die Rotation der Datenhauptachsen in die anisotrope Hauptachsenposition lautet:

$$R = \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix}$$

Nach Bestimmung der Anisotropieachsen soll ein Modell gefunden werden, das die Veränderung sowohl in der Distanz als auch in der Richtung beschreibt. Eine Methode für die Kombination von Modellen verschiedener Richtungen in ein konsistentes Modell in allen Richtungen ist, eine Transformation zu finden, die alle gerichteten Variogramme zu einem Modell mit dem standardisierten Einflußbereich von 1 zusammenfaßt. Die Methode dabei ist, den Einflußbereich so zu transformieren, daß das standardisierte Modell einen Variogrammwert für eine bestimmte Distanz in einer bestimmten Richtung liefert, der ident ist mit dem Wert des ursprünglichen gerichteten Variogramms.

Für die Strukturanalyse im obersten Horizont wird ein geschachteltes Variogramm mit Nuggeteffekt bei zonaler und geometrischer Anisotropie modelliert, da Varianz und der Anstieg der Variogramme richtungsabhängig sind. Der Ausdruck  $\vec{h}$  des Variogramms ist vektorartig, besteht aus dem absoluten Betrag  $|h|$  und der Richtung  $\alpha$ . Das Modell lautet:

$$\gamma(\vec{h}) = C_0 + \gamma_1(\vec{h}_1) + \gamma_2(\vec{h}_2) + \gamma_3(\vec{h}_3)$$

Die Nuggetvarianz  $C_0 = 20$ .

Die zweite Komponente des Modells ist ein isometrisches Sphärisches Modell nach Matheron mit einem Einflußbereich  $a_1 = 10$  und einem Schwellenwert  $C_1 = 30$ .

$$\gamma_1(\vec{h}_1) = \begin{cases} C_1 \left[ \frac{3}{2} h_1 - \frac{1}{2} h_1^3 \right] & \text{für } 0 \leq h_1 \leq a_1 \\ C_1 & \text{für } h_1 \geq a_1 \end{cases}$$

$$\vec{h}_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$$

Laut CRESSIE (1991) ist das Sphärische Modell gekennzeichnet durch ein lineares Verhalten im Ursprung. Die Tangente an das Variogramm, die durch den Ursprung geht, erreicht den Schwellenwert bei  $\frac{2}{3}$  der Reichweite.

Als nächste Komponente wird ein Gauß'sches Modell mit Einflußbereich  $a_2 = 19.32$  und einem Schwellenwert  $C_2 = 50$  angepaßt:

$$\gamma_2(\vec{h}_2) = C_2 [1 - e^{-h_2^2}]$$

$$\vec{h}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{a_2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0140 & 0.0498 \\ -0.0140 & 0.0498 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$$

Mit dem Vektor  $\vec{h}_2$  wird der Vektor  $\vec{h}$  des ursprünglichen Koordinatensystems in das anisotrope Koordinatensystem transformiert, dessen Hauptrichtungen mit den Anisotropieachsen übereinstimmen.

Als letzte Komponente wird ebenfalls ein Gauß'sches Modell mit Einflußbereich  $a_3 = 65.74$  und einem Schwellenwert  $C_3 = 30$  angepaßt:

$$\gamma_3(\vec{h}_3) = C_3 [1 - e^{-h_3^2}]$$

$$\vec{h}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{a_3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{a_3} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos \delta & \sin \delta \\ -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0146 & 0.0041 \\ 0.0146 & 0.0041 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix}$$

Nach DUTTER (1995a) ist das Gauß'sche Modell gekennzeichnet durch ein quadratisches Verhalten im Ursprung, das Modell hat im Ursprung die Steigung 0. Das Gauß'sche Modell erreicht den Schwellenwert nur asymptotisch, und zwar erreicht es 95 % des Schwellenwertes beim  $\sqrt{3}$ -fachen Einflußbereich.

Abbildung 1: Semivariogrammodell und empirisches Variogramm in Hauptrichtung 15°

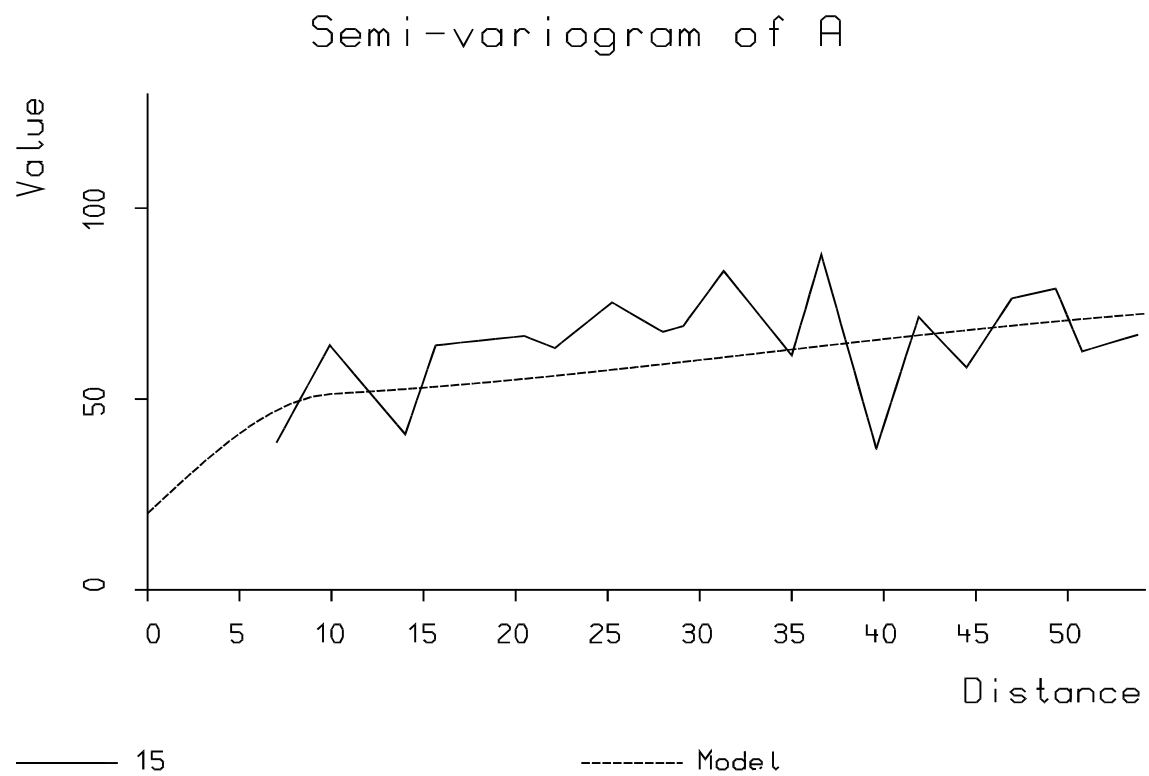
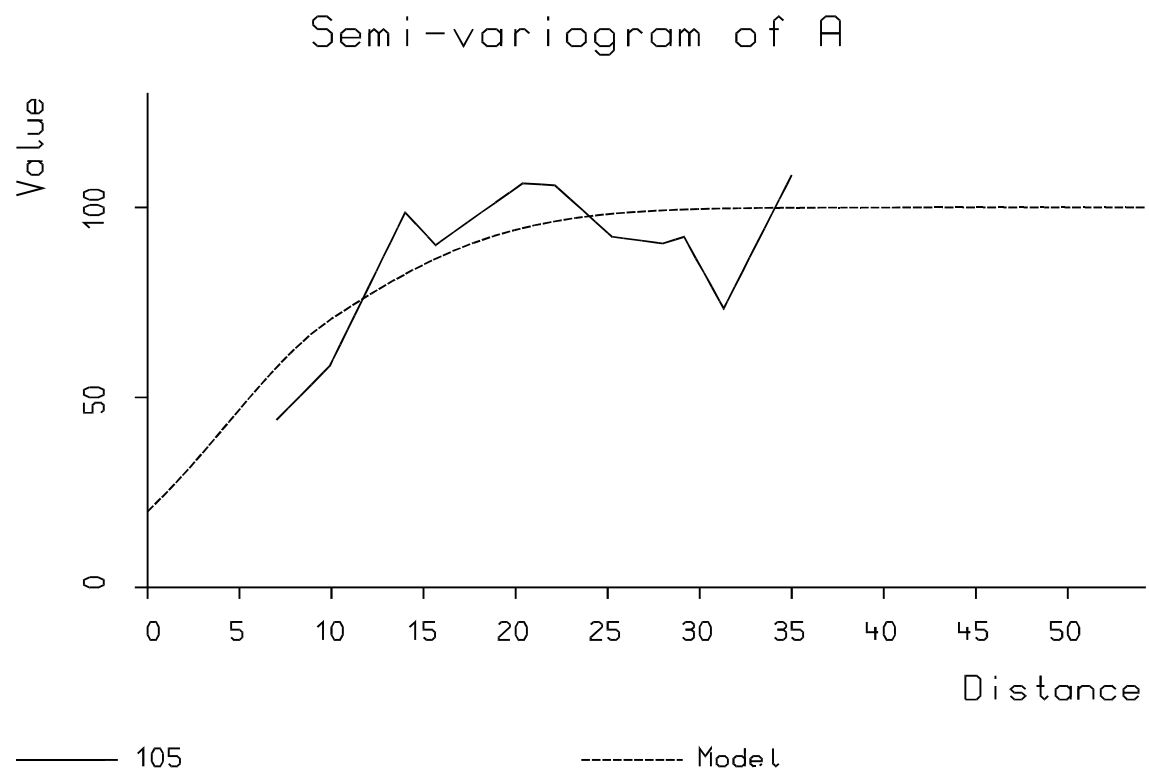


Abbildung 2: Semivariogrammodell und empirisches Variogramm in Hauptrichtung 105°



Das Modell wird einerseits für eine Serie von Distanzen entlang der Anisotropieachsen evaluiert (*Abbildung 1* und *Abbildung 2*), um zu überprüfen, ob es die entsprechenden richtungsabhängigen Variogramme liefert. Darüberhinaus ist das Modell auch für mehrere willkürliche Richtungen zwischen den Anisotropieachsen berechnet und diese Werte mit dem Stichprobenvariogramm in der entsprechenden Richtung verglichen worden. Die erfolgreiche Evaluierung deutet auf die richtige Erkennung der Anisotropieachsen und auf die Verwendung des richtigen Modells hin.

Das gesamte Variogrammodell lautet:

$$\text{für } 0 < h \leq a_1: \gamma(\vec{h}) = 20 + 30 \times \left[ \frac{3}{2} \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \left[ \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \right]^3 \right] +$$

$$+ 50 \times \left[ 1 - e^{-\left[ \begin{pmatrix} -0.0140 & 0.0498 \\ -0.0140 & 0.0498 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \right]^2} \right] + 30 \times \left[ 1 - e^{-\left[ \begin{pmatrix} 0.0146 & 0.0041 \\ 0.0146 & 0.0041 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \right]^2} \right]$$

für  $h \geq a_1$ :

$$\gamma(\vec{h}) = 20 + 30 + 50 \times \left[ 1 - e^{-\left[ \begin{pmatrix} -0.0140 & 0.0498 \\ -0.0140 & 0.0498 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \right]^2} \right] + 30 \times \left[ 1 - e^{-\left[ \begin{pmatrix} 0.0146 & 0.0041 \\ 0.0146 & 0.0041 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} \right]^2} \right]$$

### 3 Schlußfolgerungen

Die räumliche Beziehung der Variable Mächtigkeit des obersten Bodenhorizontes wird durch ein geschachteltes Variogrammodell mit Nuggeteffekt, einer sphärischen und zwei gauß'schen Komponenten, bei zonaler und geometrischen Anisotropie beschrieben. Das anisotrope Verhalten der Variable Bodenmächtigkeit deutet darauf hin, daß sowohl die Varianz als auch die Covarianz richtungsabhängig sind.

Von der Art und dem Aufbau der Bodenhorizonte leiten sich die wesentlichen Eigenschaften des Bodens, wie zum Beispiel Wasserhaltefähigkeit, Bodenfruchtbarkeit und Nährstoffverfügbarkeit, ab. Die Kenntnis der räumlichen Struktur des Bodenaufbaus, in weiterer Folge auch die Kenntnis der bodenphysikalischen und bodenchemischen Kennwerten, kann als wesentliche Information für die statistische Datenanalyse der Feldversuche, für die Anlage neuer Versuche, für die Meßnetzplanung und Meßnetzoptimierung und für die räumliche Interpolation mit Hilfe des Krigens eingesetzt werden. Diese Themenbereiche sollen Gegenstand für zukünftige Arbeiten sein.



## Literatur

- CRESSIE, N.A.C. (1991). *Statistics for Spatial Data*. New York: Wiley & Sons.
- DUTTER, R. (1995a). *Geostatistik*, Technische Universität Wien: Vorlesungsskriptum.
- DUTTER, R. (1995b). *GEOSAN - Program System for Geostatistical Analysis*, Technische Universität Wien: Handbook.
- ISAAKS, E.H., SRIVASTAVA, R.M. (1989). *An Introduction to Applied Geostatistics*. New York, Oxford: Oxford University Press.
- JOURNEL, A.G., HUIJBREGTS, C.J. (1978). *Mining Geostatistics*. New York: Academic Press.
- WEBSTER, R., OLIVER, M.A. (1990). *Statistical Methods in Soil and Land Resource Survey*. New York, Oxford: Oxford University Press.

Adresse des Autors:

Univ.-Ass. DI. Dr. Herbert Schwarz  
 Institut für Mathematik und Angewandte Statistik  
 Universität für Bodenkultur  
 Gregor Mengelstr. 33, A-1180 Wien  
 E-Mail: schwarzh@mail.boku.ac.at  
 Tel. ++43-1-47654-5063  
 Fax. ++43-1-47654-5217